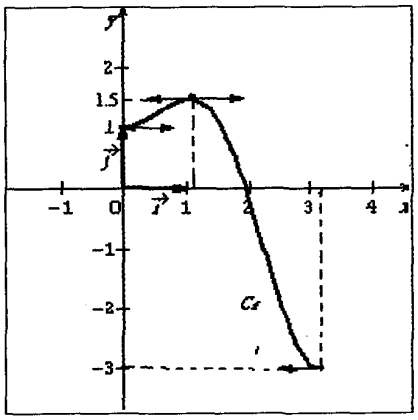
c)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		−	0	+	0
$f(x)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3

d)



● a) g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ donc g réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ sur L'intervalle $J=\left[-3,\frac{3}{2}\right]$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur L'intervalle $J=\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

b) g est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ et $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{3},\pi\right[$ donc g^{-1} est dérivable sur $D=\left]-3,\frac{3}{2}\right[$

b) $t\in J$, on sait que : $gog^{-1}(t)=t$ donc on a :

$$-2\cos^2(g^{-1}(t))+2\cos(g^{-1}(t))+1=t$$
$$\Leftrightarrow$$
$$-2\cos^2(g^{-1}(t))+2\cos(g^{-1}(t))+1-t=0\ (E)$$

Dans l'équation (E) posons $\cos(g^{-1}(t))=X$ on aura :
$-2X^2+2X+1-t=0\ (E')$ *et* $X=\cos(g^{-1}(t))$

On va resoudre l'équation (E'). $-2X^2+2X+1-t=0$

$\Delta'=b'^2-ac=1+2(1-t)=3-2t\geq 0$ *car* $t\leq\frac{3}{2}$

D'où $\begin{cases} X'=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{-1+\sqrt{3-2t}}{-2}=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2} \\ X''=\dfrac{-1-\sqrt{3-2t}}{-2}=\dfrac{1+\sqrt{3-2t}}{2} \end{cases}$

Ce qui donne $\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1+\sqrt{3-2t}}{2}\geq 0$

ou $\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2}$

Or le cos change de signe sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ et $g^{-1}(t)\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

Donc : $\boxed{\cos(g^{-1}(t))=\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2};t\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]}$

On sait que : $\cos^2(g^{-1}(t))+\sin^2(g^{-1}(t))=1$ d'où

$\sin^2(g^{-1}(t))=1-\cos^2(g^{-1}(t))$

$=$

$=1-(\dfrac{1-\sqrt{3-2t}}{2})^2=\dfrac{4-(1-2\sqrt{3-2t}+3-2t)}{4}$

$=\dfrac{2t+2\sqrt{3-2t}}{4}=\dfrac{\overbrace{t+\sqrt{3-2t}}^{\geq 0}}{2}$

Donc : $\boxed{\sin(g^{-1}(t))=\dfrac{\sqrt{t+\sqrt{3-2t}}}{\sqrt{2}};t\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]}$

Calculons maintenant la dérivée de $g^{-1}(t)$

$\forall t\in\left]-3,\frac{3}{2}\right[:\ (g^{-1})'(t)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(t))}$

$=\dfrac{1}{2\sin g^{-1}(t).(2\cos g^{-1}(t)-1)}$

Remplaçant $\sin(g^{-1}(t))$ et $\cos(g^{-1}(t))$ par les résultas (1) et (2) trouvées précédemment il résulte :

$$(g^{-1})'(t)=\frac{1}{2.\frac{\sqrt{t+\sqrt{3-2t}}}{\sqrt{2}}(2.\frac{1-\sqrt{3-2t}}{2}-1)}\Rightarrow$$

$$\boxed{(g^{-1})'(t)=\frac{-1}{(\sqrt{2(\sqrt{t+\sqrt{3-2t}})(\sqrt{3-2t})})},\forall t\in\left]-3,\frac{3}{2}\right[}$$

Exercice n° 23 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{2+x}$

● a) $\forall x\neq -2$:

$$-x+2-\frac{3}{x+2}=\frac{4-x^2-3}{x+2}=\frac{1-x^2}{x+2}=f(x)$$

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn